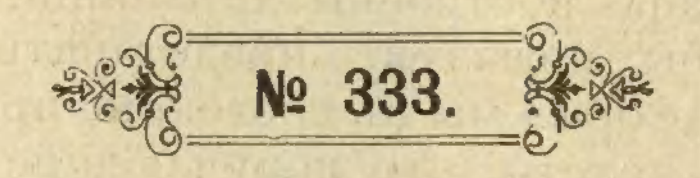
XXVIII Сем. № 9.

Вѣстникъ Опытной Физики

и

Элементарной Математики.

15 Ноября



№ 333.

1902 г.

О средствахъ, достаточныхъ для построенія геометрическихъ задачъ второй степени.

Д. Шора въ Геттингенѣ.

*(Продолженіе *).*

Въ предыдущей главѣ было показано, что для рѣшенія всякой задачи второй степени нѣтъ необходимости принимать весь комплексъ пяти постулатовъ—1), 2), 3), 4) и 5) (см. стран. 49—50, № 327)—, которыми опредѣляется группа этихъ задачъ. Правда, если исключить постулатъ 1), то нельзя построить прямой линіи, можно при помощи циркуля строить только точки, которыми эта линія опредѣляется, равно какъ и сколь-угодно большое число на ней лежащихъ точекъ. Точно такъ же нельзя было бы строить окружностей, если исключить постулатъ 2). Но пока рѣчь идетъ *о построеніи точекъ*, рѣшенія M a s c h e r o n i, о которыхъ шла рѣчь въ предыдущей главѣ, ничѣмъ не отличаются по своимъ результатамъ, какъ съ формальной точки зрѣнія, такъ и съ практической, отъ обыкновенныхъ Е в к л и д о в ы х ъ построеній. Можно было бы измѣнить способъ изложенія построеній M a s c h e r o n i, при-

*) См. № 328 „Вѣстника“.

соединивъ постулатъ 1), но если бы при этомъ, какъ прежде, постулаты 3) и 4) остались бы исключенными, то проведенныя прямыя не давали бы еще точекъ пересѣченія. Такого рода построенія давали бы точно тѣ же результаты, что Евклидовы, даже въ примѣненіи къ построенію прямыхъ линій: послѣднія можно было бы строить на ряду съ окружностями и точками. Но такое изложеніе слишкомъ абстрактно, такъ какъ противорѣчитъ обычному представленію объ употребленіи линейки: трудно было бы читателю отвлечься отъ привычки считать точку построенной, коль скоро построены двѣ линіи, черезъ нее проходящія. Можно было бы, пожалуй, представить себѣ, что прямолинейныя черты, которыя мы въ состояніи проводить при помощи линейки, настолько толсты, что получающійся въ пересѣченіи ихъ параллелограммъ слишкомъ великъ для опредѣленія точки; скажемъ—рейсфедеръ, которымъ мы чертимъ прямыя, притупленъ и не даетъ тонкихъ линій; въ то время какъ циркуль въ состояніи чертить болѣе тонкія окружности, дающія соотвѣтственно этому болѣе точныя точки пересѣченія. Такое представленіе вполнѣ соотвѣтствовало бы комплексу постулатовъ 1), 2) и 5), подобно тому, какъ представленіе о томъ, что въ нашемъ распоряженіи находится только циркуль, соотвѣтствуетъ постулатамъ—2) и 5). Но это представленіе кажется мнѣ излишне искусственнымъ, а поэтому я предпочелъ въ главѣ I исключить постулатъ 1) одновременно съ 3) и 4), что, кстати сказать, дѣлали всѣ авторы, которые писали объ этомъ вопросѣ. Съ формальной точки зрѣнія, повторяю, нѣтъ нужды этого дѣлать, но въ виду бóльшей наглядности, я счелъ это болѣе цѣлесообразнымъ.

Обратимъ теперь наше вниманіе на постулаты 3), 4) и 5), которыми опредѣляется *построеніе точекъ*. Какъ мы видѣли, достаточно принять постулатъ 5), чтобы можно было вывести остальные постулаты 3) и 4), а слѣдовательно, и всѣ задачи второй степени. Невольно возникаетъ вопросъ, нельзя ли ограничить комплексъ этихъ постулатовъ инымъ образомъ. Другими словами: *нельзя ли строить всѣ задачи второй степени помощью линейки при ограниченномъ пользованіи циркулемъ?* Этимъ вопросомъ мы и займемся въ нижеслѣдующей главѣ.

II.

Построенія при помощи линейки при ограниченномъ пользованіи циркулемъ.

10. *Задачи первой степени.*—Прежде всего зададимъ себѣ вопросъ: *нельзя-ли построить всякую задачу второй степени при помощи одной линейки?* — Аналитическая геометрія и алгебра даютъ на этотъ вопросъ вполнѣ опредѣленный отвѣтъ: *Нѣтъ, это невоз-*

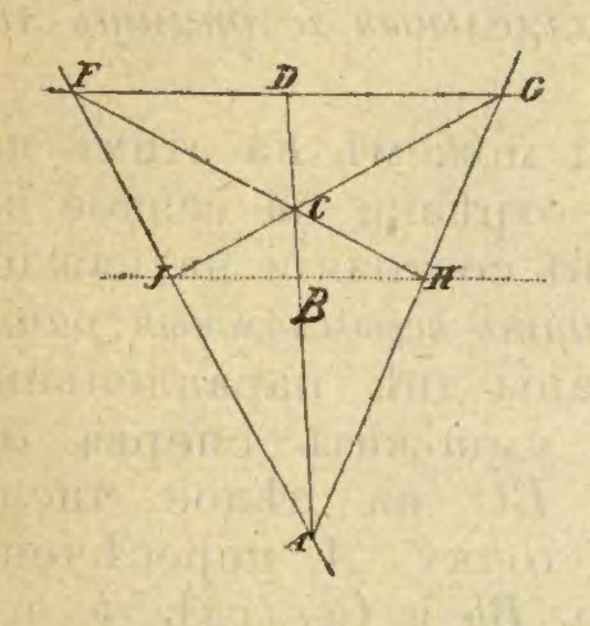
можно! [17]) Постулатовъ 1) и 3) недостаточно для построенія *всѣхъ* задачъ второй степени.

Но нѣкоторыя, немногія задачи этой группы могутъ быть построены одной только линейкой, безъ помощи циркуля; такія задачи носятъ названіе *задачъ первой степени.*

Задачи первой степени не имѣютъ прямого отношенія къ нашей темѣ; тѣмъ не менѣе, мы посвятимъ имъ этотъ параграфъ, при чемъ приведемъ лишь то, на что мы принуждены будемъ ссылаться ниже. Замѣчу, кстати, что построенія эти интересны и сами по себѣ, такъ какъ играютъ важную роль въ синтетической геометріи. Конечно, въ настоящей статьѣ мы не можемъ приводить относящіяся сюда теоремы во всей ихъ общности, а принуждены ограничиться лишь самыми частными случаями [18]).

Прежде всего, докажемъ слѣдующую теорему:

Если въ любой трапеціи (см. фиг. 11) *FGHJ продолжить боковыя стороны до пересѣченія ихъ въ точкѣ A и провести діагонали, которыя пересѣкутся въ точкѣ C, то прямая AC разсѣчетъ параллельныя стороны JH и FG пополамъ соотвѣтственно въ точкахъ B и D.*



Фиг. 11.

Дѣйствительно, изъ подобія треугольниковъ заключаемъ, что

$$FD:JB = DG:BH;$$

съ другой стороны

$$FD:BH = DG:JB.$$

Изъ этихъ двухъ равенствъ легко получаемъ:

$$FD:DG = JB:BH = BH:JB = DG:FD.$$

А слѣдовательно,

$$FD = DG$$

и

$$JB = BH,$$

что и требовалось доказать.

Основываясь на этой теоремѣ, не трудно *при помощи одной*

---

[17]) Если бы это было возможно, то мы могли бы отнести построеніе любой задачи второй степени, выполненное помощью одной линейки, къ нѣкоторой прямолинейной системѣ координатъ; выразивъ такимъ образомъ рѣшеніе нашей задачи аналитически, мы бы получили рядъ уравненій первой степени. Изъ алгебры же извѣстно, что не всякая задача второй степени можетъ быть рѣшена при помощи ряда уравненій первой степени, напр., постулата 5) нельзя рѣшить такимъ образомъ. Слѣдовательно, наше допущеніе немыслимо.

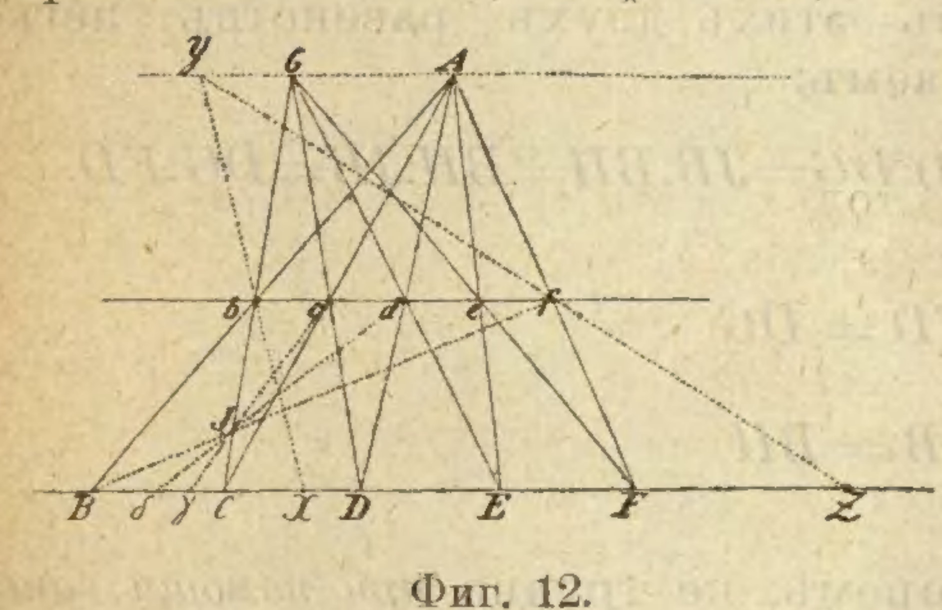
[18]) Въ недалекомъ будущемъ я предполагаю помѣстить на страницахъ этого журнала небольшую статью, спеціально посвященную задачамъ *первой* степени.

только линейки раздѣлить любой отрѣзокъ FG *нѣкоторой прямой на двѣ равныя части, если построена какая-нибудь прямая* JH*, параллельная* FG. Для этого достаточно черезъ любыя точки J и H (см. фиг. 11) прямой JH провести прямыя FH и CH. Въ полученной такимъ образомъ трапеціи легко построить помощью линейки прямую AC, которая раздѣлитъ сторону FG въ точкѣ D (равно какъ и сторону JH въ точкѣ B) на двѣ равныя части.

Точно также, *если на нѣкоторой прямой* FG *построена середина* D *любого построеннаго отрѣзка* FG*, то мы при помощи одной линейки въ состояніи провести черезъ любую точку* J *внѣ прямой* FG *къ послѣдней параллельную.* Для этого достаточно провести прямыя FJ и GJ (см. фиг. 11) и, взявъ на прямой FJ любую точку A, построить прямыя AG и AD; послѣдняя изъ нихъ дастъ въ пересѣченіи съ GJ точку C, и прямая FC пересѣчетъ AG въ точкѣ H. Проведенная черезъ J и H прямая и есть искомая параллельная. (Доказательство отъ противнаго).

Такимъ образомъ, *если даны какія-либо двѣ параллельныя прямыя линіи или если на какой-нибудь прямой данъ любой отрѣзокъ и его середина, то мы въ состояніи при помощи линейки строить къ данной прямой черезъ любыя точки внѣ ея параллельныя и дѣлить любые отрѣзки на нихъ пополамъ.*

Больше того, при помощи линейки мы можемъ на этихъ параллельныхъ прямыхъ умножать и дѣлить отрѣзки на всякое заданное цѣлое число; а слѣдовательно, мы въ состояніи на каждой изъ этихъ параллельныхъ прямыхъ *производить всевозможныя раціональныя операціи.* Дѣйствительно, пусть даны двѣ параллельныя прямыя BC и bc (см. фиг. 12) и требуется умножить сперва отрѣзокъ BC на цѣлое число. Черезъ точку A пересѣченія прямыхъ Bb и Cc (гдѣ b и c произвольныя точки прямой bc) проводимъ прямую AY, параллельную BC; соединивъ C съ b, получимъ на ней точку G, а проведя затѣмъ Gc, отсѣчемъ на прямой BC отрѣзокъ CD, равный BC. Такимъ образомъ, мы помножили BC на 2.



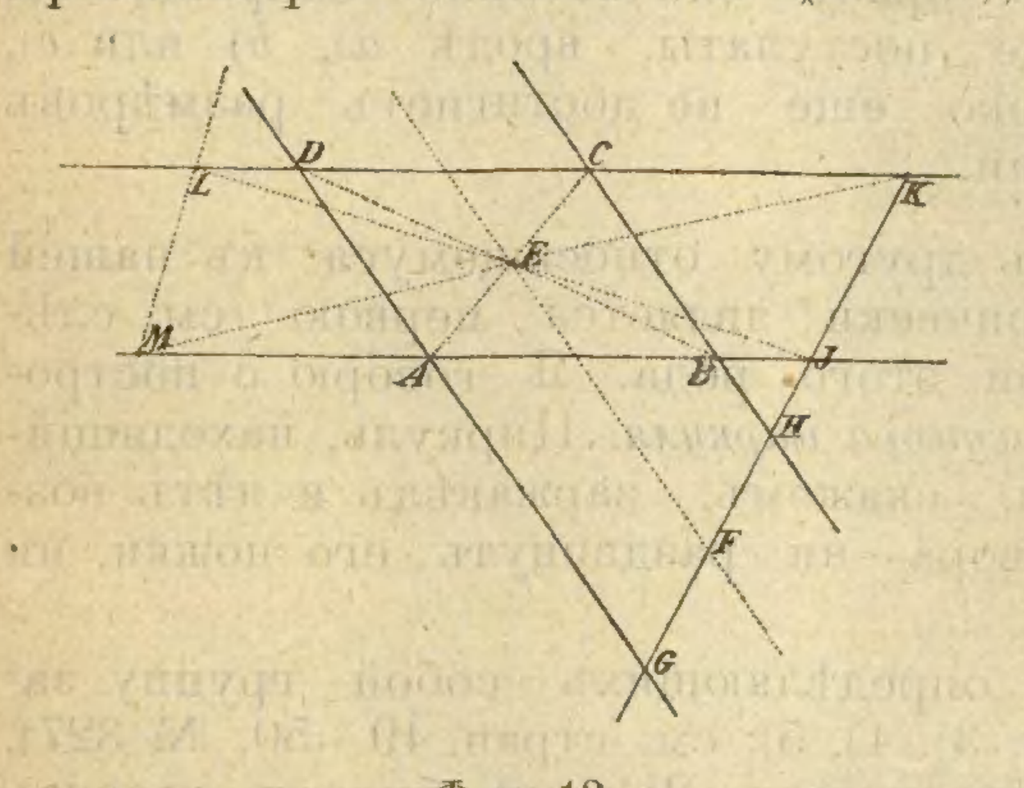
Фиг. 12.

Повторяя эту операцію послѣдовательно, мы получимъ точки E, F и т. д., какъ это показано на чертежѣ 12, и $EB = 3.CB$, $FB = 4.CB$ и т. д. Чтобы раздѣлить отрѣзокъ BC на цѣлое число частей, поступаемъ слѣдующимъ образомъ: пусть $bc = cd = \ldots = ef$ — n отрѣзковъ на прямой bc; соединимъ B съ f и C съ b; точку пересѣченія J прямыхъ Bf и Cb соединимъ съ точками $c, d, \ldots, f$ и продолжимъ эти линіи до пересѣченія съ BC въ точкахъ $\gamma, \delta, \ldots$; эти точки раздѣлятъ BC на n равныхъ частей.

Но не только эти раціональныя операціи можемъ мы выполнять надъ данными отрѣзками при помощи линейки, если

даны двѣ параллельныя прямыя; мы въ состояніи также *переносить отрѣзки вдоль прямой, на которой они лежатъ.* Напр,, на чертежѣ 12 показано, какъ можно перенести отрѣзокъ BF вдоль прямой BC такъ, чтобы точка B упала въ заданную точку X (точка F упадетъ въ точку Z). При обычныхъ построеніяхъ для перенесенія отрѣзковъ пользуются циркулемъ; поэтому интересно отмѣтить, что мы при нашихъ ограниченныхъ средствахъ можемъ всетаки выполнять эту функцію циркуля; правда, пока только для *перенесенія отрѣзковъ вдоль прямой, на которой они лежатъ.* Мы еще *не* въ состояніи переносить отрѣзки съ одной прямой на другую.

Еще бóльшаго можемъ мы достичь при помощи линейки, если въ плоскости чертежа построены двѣ пары параллельныхъ прямыхъ, т. е. *параллелограммг;* или, что все равно, если построены три параллельныя другъ другу прямыя, одна изъ которыхъ лежитъ на равномъ разстояніи отъ двухъ другихъ. Если построенъ параллелограммъ $ABCD$ (см. фиг. 13), то мы, на основаніи предыдущаго, можемъ провести черезъ точку E пересѣченія діагоналей прямую параллельную одной изъ паръ сторонъ (DA и CB скажемъ) параллелограмма. Эта прямая EF будетъ лежать на равныхъ разстояніяхъ отъ DA и CB, а слѣдовательно, три прямыя DA, EF и CB пересѣкаются съ любой прямой GK въ точкахъ соотвѣтственно G, F и H такъ, что $GF=FH$ А коль скоро намъ дана середина отрѣзка, построеннаго на этой прямой, то мы можемъ проводить помощью линейки параллельныя ей прямыя. Когда въ плоскости чертежа были даны только 2 параллельныя прямыя, то мы могли проводить параллельныя только къ нимъ и производить только на этихъ параллельныхъ раціональныя операціи съ данными отрѣзками; точно также мы могли переносить отрѣзки только вдоль каждой прямой изъ пучка этихъ параллельныхъ. Теперь же, когда въ плоскости чертежа построенъ параллелограммъ, мы можемъ строить при помощи линейки параллельныя къ любой прямой, и на любой прямой производить раціональныя операціи. Мы съ состояніи также переносить отрѣзки съ одной изъ параллельныхъ прямыхъ на другую, а не только вдоль каждой изъ нихъ; въ этомъ послѣднемъ читатель безъ труда можетъ убѣдиться самъ. Считаю нелишнимъ отмѣтить тотъ фактъ, что перенесеніе отрѣзка съ одной прямой на другую въ томъ случаѣ, если эти прямыя *не* параллельны, *не* можетъ быть всетаки выполнено этими средствами.



Фиг. 13.

Этими предложеніями изъ теоріи задачъ первой степени мы ограничимся.

11. Построенія, о которыхъ шла рѣчь въ предыдущемъ параграфѣ, основываются не только на постулатахъ 1) и 3); мы принимаемъ, кромѣ нихъ, еще такіе постулаты:

a) *построены двѣ параллельныя прямыя;*

или: b) *построена середина построеннаго отрѣзка нѣкоторой прямой*;

c) *построенъ параллелограммъ.*

Эти постулаты, или многочисленные другіе подобные имъ, даютъ возможность выводить изъ постулатовъ 1) и 3) многія построенія, которыя при помощи одной линейки не были бы выполнимы. На постулатахъ 1) и 3), безъ какихъ-либо другихъ, основывается лишь небольшое число задачъ, въ разборъ которыхъ мы не можемъ входить здѣсь.

Итакъ, если отбросить постулаты 2), 4) и 5), то группа доступныхъ построенію задачъ сразу значительно сокращается; если даже присовокупить еще постулаты, вродѣ *a*), *b*) или *c*), то и тогда группа эта далеко еще не достигнетъ размѣровъ группы задачъ второй степени.

12. Обратимся теперь къ другому относящемуся къ нашей темѣ вопросу, который исторически является первою (см. слѣдующій параграфъ) проблемой этого рода. Я говорю о построеніяхъ *помощью неизмѣннаго раствора циркуля.* Циркуль, находящійся въ нашемъ распоряженіи, скажемъ, заржавѣлъ и нѣтъ возможности измѣнить его раствора—ни раздвинуть его ножки, ни сдвинуть.

Изъ пяти постулатовъ, опредѣляющихъ собой группу задачъ второй степени (1), 2*a*), 3), 4), 5): см. стран. 49—50, № 327), измѣнится при этомъ лишь постулатъ 2*a*); онъ будетъ гласить теперь слѣдующимъ образомъ:

2*a**) Вокругъ всякой построенной точки, какъ вокругъ центра, мы можемъ описать окружность, но *только опредѣленнымъ*, *разъ на всегда установленнымъ и неизмѣннымъ радіусомъ.*

Оказывается, что при этомъ объемъ группы доступныхъ построенію задачъ совершенно не мѣняется [19]). Но мы не будемъ приводить здѣсь доказательства этого утвержденія, такъ какъ постулатъ 2*a*) можетъ быть измѣненъ еще больше и при этомъ всякая задача второй степени остается всетаки доступной построенію. А именно, его можно принять въ слѣдующей формулировкѣ:

2a^0) *Въ плоскости чертежа построенъ вокругъ нѣкоторой опредѣленной точки C, какъ центра, кругъ.* Никакой другой кругъ не можетъ быть построенъ.

---

[19]) Исключая самый постулатъ 2*a*), который, понятно, нельзя построить неизмѣннымъ растворомъ циркуля. Мы можемъ строить лишь точки, которыми опредѣляются искомыя окружности, коль скоро ихъ радіусъ отличенъ отъ принятаго раствора циркуля.

На языкѣ практики это означаетъ, что требуется выполнять геометрическія построенія *при помощи одной линейки, если въ плоскости чертежа построенъ вокругъ даннаго центра кругъ.* Какъ будетъ показано ниже, всѣ задачи второй степени могутъ быть построены этими средствами. Ясно, что этимъ самымъ будетъ доказано наше утвержденіе, что всякую задачу второй степени можно построить линейкой и неизмѣннымъ растворомъ циркуля. Дѣйствительно, описавъ одинъ разъ нашимъ нераскрывающимся циркулемъ окружность, мы можемъ отложить его въ сторону и всѣ остальныя построенія производить линейкой; такія построенія будутъ во всякомъ случаѣ выполнены неизмѣннымъ растворомъ циркуля. Постулатъ $2a^0$) составляетъ лишь часть постулата $2a^*$ и заключается въ немъ, какъ особенный случай въ общемъ.

13. Какъ я сказалъ выше, построенія линейкой и циркулемъ, при неизмѣнномъ растворѣ его, служатъ первымъ примѣромъ рѣшенія геометрическихъ задачъ при ограниченныхъ средствахъ. Moritz Cantor [20]), ссылаясь на одну фразу изъ сочиненій Паппуса Александрійскаго [21]), утверждаетъ, что уже грекамъ должны были быть извѣстны нѣкоторыя построенія этого рода. Но утвержденіе это, по всей вѣроятности, слишкомъ поспѣшно [22]). Напротивъ того, у арабовъ мы встрѣчаемъ, дѣйствительно построенія нѣкоторыхъ задачъ при помощи неизмѣннаго раствора циркуля, а именно, у знаменитаго математика второй половины X-го вѣка Абулъ Вафа, который построилъ такимъ образомъ пятиугольникъ, восьмиугольникъ и т. п.; эти рѣшенія не случайно были выполнены неизмѣннымъ растворомъ циркуля, а, какъ на то указываетъ ихъ авторъ, съ яснымъ сознаніемъ принятаго ограниченія.

Затѣмъ въ теченіе почти пяти вѣковъ вопросъ этотъ никѣмъ не затрагивается; и лишь въ исходѣ XV-го столѣтія мы встрѣчаемъ у Leonardo da Vinci нѣсколько построеній правильныхъ многоугольниковъ, выполненныхъ при этомъ ограниченіи; большинство этихъ построеній лишь приблизительно вѣрны, и отмѣчены самимъ ихъ изобрѣтателемъ словомъ „falso", какъ неточныя [23]). Къ той же эпохѣ (т. е. къ началу XVI го вѣка) относится сочиненіе другого великаго художника Albrecht'a Dürer'a [24]), въ которыхъ встрѣчаются построенія, выполненныя

---

[20]) M. Cantor, „*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*"; Bd. II, Aufl. II, p. 421.

[21]) Время жизни Паппуса Александрійскаго относится приблизительно къ первой половинѣ IV-го вѣка (по Р. Х.) либо къ концу III-го.

[22]) W. M. Kutta, „*Zur Geschichte der Geometrie mit constanter Zirkelöffnung*"; Nova Acta, Abh. d. Leop.-Carol. Deutsch. Akad. d. Naturforscher, Bd. LXXI; p. 72—74.

[23]) Лишь немногія изъ научныхъ работъ Leonardo da Vinci (1452—1519) уцѣлѣли; онѣ относятся, по всей вѣроятности, къ эпохѣ между 1482 и 1499 годами, когда великій художникъ руководилъ своей *Академіей*.

[24]) A. Dürer, „*Underweysung der messung mit dem zircel und richtscheyt etc.*"; Nürnberg 1525.

однимъ растворомъ циркуля, и книга неизвѣстнаго автора — „*Geometria deutsch*“ —, содержащая немногія относящіяся сюда рѣшенія. Leonardo da Vinci и Dürer'у живопись обязана первымъ раціональнымъ примѣненіемъ перспективы; оба придавали измѣренію и геометрическому черченію въ живописи большое значеніе. Можетъ быть, циркуль того времени не такъ легко было раздвигать, какъ нашъ, а поэтому было желательно для болѣе скораго черченія имѣть способъ построенія безъ измѣненія раствора.

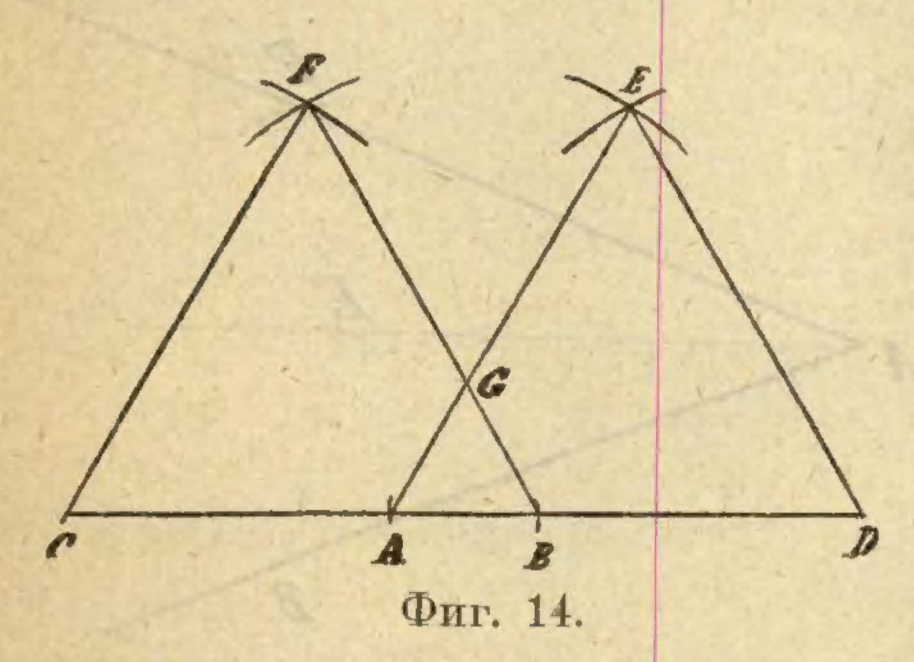
Такъ что, пожалуй, можно предполагать, что стремленіе найти способы построеній неизмѣннымъ радіусомъ было у послѣднихъ двухъ авторовъ вызвано потребностью практики. Напротивъ того, итальянскіе математики, которые въ непосредственно слѣдующую эпоху, т. е. около середины XVI-го вѣка, разрѣшаютъ вопросъ о построеніяхъ однимъ растворомъ циркуля съ общностью, какая только была возможна въ то время, считаютъ задачи такого рода лишенными всякаго практическаго смысла, и могущими лишь служить хорошею гимнастикой ума, пробою молодыхъ силъ.

Рѣшеніе вопроса о построеніяхъ при неизмѣнномъ растворѣ циркуля, по случайному стеченію обстоятельствъ, связано съ первымъ рѣшеніемъ уравненій третьей степени. Scipione del Ferro [25]), который впервые обладалъ рѣшеніемъ кубичныхъ уравненій, занимался также отыскиваніемъ построеній неизмѣннымъ циркулемъ. Возможно, что вмѣстѣ съ алгеброй эта проблема перешла въ Италію отъ арабовъ. Сочиненія del Ferro остались ненапечатанными, но несмотря на это, нѣкоторые математики тѣмъ или инымъ путемъ знакомились съ его идеями. Такъ, Tartaglia [26]), открывшій въ тридцатыхъ годахъ XVI-го столѣтія рѣшеніе уравненій третьей степени, несомнѣнно, не былъ совершенно независимъ отъ вліянія del Ferro. Черезъ него же Tartaglia познакомился, по всей вѣроятности, и съ интересующей насъ проблемой; и она послужила ему впослѣдствіи оружіемъ при полемикѣ, которую ему пришлось вести изъ-за пріоритета открытія рѣшенія кубичныхъ уравненій. Эта полемика, давшая толчокъ къ окончательному рѣшенію вопроса о построеніяхъ неизмѣннымъ растворомъ циркуля, возникла слѣдующимъ образомъ. Tartaglia держалъ свое открытіе рѣшенія кубичныхъ уравненій въ тайнѣ, боясь, что какой-либо другой математикъ воспользуется имъ для новыхъ важныхъ открытій; самъ же онъ, занятый, по его словамъ, другой работой (переводомъ Евклида на итальянскій языкъ), не могъ опубликовать своего рѣшенія. Лишь послѣ долгихъ просьбъ сообщилъ онъ это рѣше-

[25]) По-латыни Scipio Ferreus — преподавалъ математику въ Болоньѣ, умеръ около 1526 г.

[26]) Nicolo Tartaglia, по-латыни Tartalea, (1500—1557) преподавалъ въ Венеціи.

ніе Миланскому математику Cardano [27]), торжественно поклявшемуся не опубликовывать его. Черезъ нѣсколько времени Cardano познакомился съ сочиненіями del Ferro и нашелъ въ нихъ то же рѣшеніе, которое сообщилъ ему Tartaglia. Поэтому Cardano счелъ себя освобожденнымъ отъ данной клятвы и опубликовываетъ въ 1545 году книгу—„Ars magna etc.“—, въ которой, исходя изъ рѣшенія Tartaglia и del Ferro, которыхъ обоихъ онъ называетъ, онъ развиваетъ теорію уравненій третьей и четвертой степени. Между тѣмъ, Tartaglia отнюдь не желалъ уступить Cardano пріоритетъ, и въ опубликованной вскорѣ затѣмъ книгѣ, посвященной тому же предмету, напомнилъ о нарушеніи клятвы. Отвѣтъ не заставилъ себя ждать. За Cardano вступился любимый ученикъ его Ferrari [28]) и вызвалъ Tartaglia на публичный диспутъ. Но Tartaglia долго не соглашался, отвѣчая на вызовы Ferrari печатными посланіями; больше года продолжалась эта полемика (*Cartelli* и *Risposte*), содержавшая на ряду съ грубѣйшею руганью рядъ задачъ, которыя враги ставили другъ другу. Между прочимъ, Tartaglia предложилъ противнику выполнить нѣсколько построеній Евклидовыхъ задачъ при неизмѣнномъ растворѣ циркуля. Это дало поводъ Ferrari вмѣстѣ съ Cardano заняться этимъ вопросомъ, и они скоро разрѣшили его, найдя построенія всѣхъ Евклидовыхъ задачъ, выполненныя такимъ образомъ. Также и Tartaglia нашелъ такое рѣшеніе большинства Евклидовыхъ задачъ, но опубликовалъ его лишь значительио позже. Зато ученикъ его Benedetti [29]) уже въ 1553 году самостоятельно разрѣшаетъ неизмѣннымъ растворомъ циркуля всѣ Евклидовы задачи въ книгѣ — „*De resolutine omnium Euklidis problematum aliorumque una tantummodo circuli data apertura*“ (Венеція, 1553).



Фиг. 14.

Я позволю себѣ привести нѣсколько наиболѣе любопытныхъ построеній, изобрѣтенныхъ этими четырьмя математиками, не вдаваясь въ болѣе подробный разборъ системъ построеній, придуманныхъ каждымъ изъ нихъ.

А. *На сторонѣ AB построить равносторонній треугольникъ.*

Изъ точекъ A и B сдѣлаемъ на прямой AB (см. фиг. 14)

---

[27]) Geronimo Cardano, по-латыни Hieronymus Cardanus, (1501—1576) преподавалъ тогда въ Миланѣ. Его именемъ названы формулы корней кубическихъ уравненій – *кардановы формулы*.

[28]) Luigi Ferrari, по-латыни Ludovicus Ferrarius (1522—1565)—вѣрный ученикъ Cardano; преподавалъ въ Миланѣ и Болоньѣ.

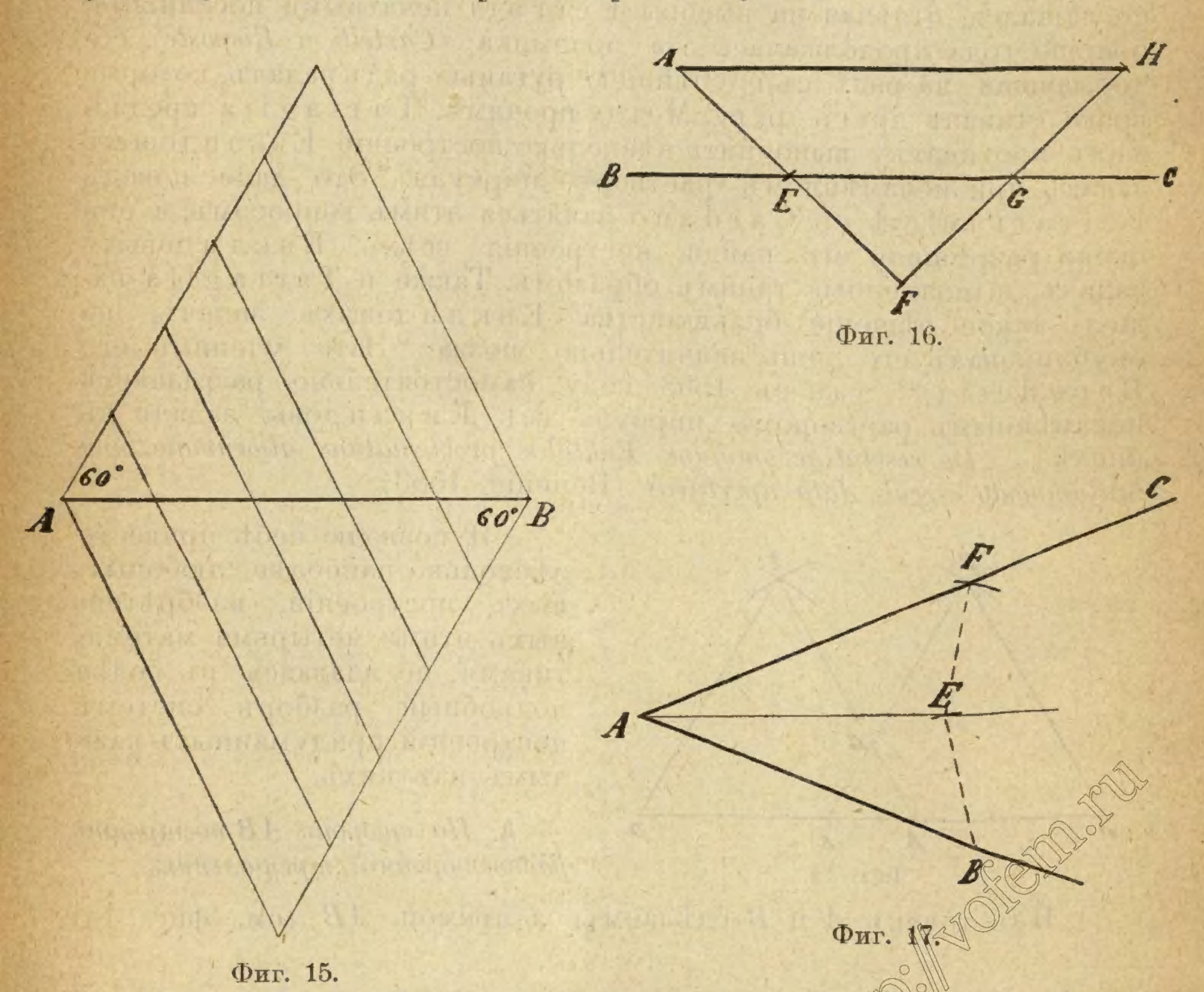
[29]) Giovani Battista Benedetti, по-латыни Benedictus, (1530—1590)—философъ и математикъ герцога Савойскаго.

засѣчки даннымъ неизмѣннымъ радіусомъ соотвѣтственно въ точкахъ D и C. На AD и BC постояннымъ радіусомъ строимъ равносторонніе треугольники AED и BFC; ихъ стороны AE и BF пересѣкутся въ точкѣ G, такъ что ABG искомый равносторонній треугольникъ.

B. *Требуется раздѣлить отрѣзокъ AB на n равныхъ частей.*

По разныя стороны данной прямой строимъ при A и B углы въ 60°, такъ что другія стороны ихъ параллельны (см. фиг. 15); отложивъ на этихъ сторонахъ по n отрѣзковъ, равныхъ данному радіусу, соединимъ полученныя такимъ образомъ точки прямыми. Послѣднія раздѣлятъ AB на n равныхъ частей.

C. *Черезъ точку A* (см. фиг. 16), *лежащую внѣ прямой BC, требуется провести къ этой прямой параллельную.*



Фиг. 15.

Фиг. 16.

Фиг. 17.

Сдѣлаемъ на BC неизмѣннымъ радіусомъ изъ точки A засѣчку въ E и на прямой AE изъ E засѣчку въ F; далѣе, дѣлаемъ изъ F засѣчку G на BC, и изъ G въ H на FG: прямая AH параллельна BC.

D. *Отложить отрѣзокъ AB на прямой AC.*

Раздѣлимъ уголъ BAC (см. фиг. 17) пополамъ, что произ-

водится всегда неизмѣннымъ растворомъ циркуля; затѣмъ дѣлаемъ изъ B неизмѣннымъ радіусомъ въ E засѣчку на биссектрисѣ AD и изъ E въ F на AC. Ясно, что $AF=AB$.

Слѣдуетъ прибавить, что, если въ какомъ-нибудь построеніи такого рода окружность, описанная неизмѣннымъ радіусомъ, не пересѣкаетъ построенную или данную прямую или окружность, то приходится нѣсколько усложнять построеніе, вставляя вспомогательныя линіи. Такъ, въ задачѣ **D** можетъ случиться, что окружность, описанная вокругъ B, какъ центра (см. фиг. 17), не пересѣчетъ биссектрисы AD; въ такомъ случаѣ мы дѣлимъ уголъ BAD пополамъ, полученный уголъ снова пополамъ и т. д., пока не получится столь малый уголъ, что наша окружность пересѣкаетъ его. — Подобнымъ же образомъ приходится поступать при построеніи задачи **C**, если разстояніе A отъ BC больше, чѣмъ неизмѣнный радіусъ (см. фиг. 16).

(Продолженіе слѣдуетъ).

Изслѣдованія южно-полярныхъ странъ. *)

Съ окончаніемъ въ 1842 году извѣстной антарктической экспедиціи Дж. Росса, открывшей землю „Викторіи" съ ея величественными вулканами „Эребусъ" и „Терроръ", изслѣдованіе южнополярныхъ странъ въ теченіе 50 лѣтъ какъ бы игнорировалось географами. Въ 1894 г. плаваніе „Antarctic" съ Борхгревингомъ къ землѣ Викторіи возбудило вновь живѣйшій интересъ къ антарктическимъ изслѣдованіямъ. Въ настоящее время этими изслѣдованіями занимаются три экспедиціи: 1) англійская, на суднѣ „Discovery", руководимая Скоттомъ, 2) германская, на суднѣ „Gauss", подъ руководствомъ Дрыгальскаго и 3) шведская, на „Antarctic", подъ руководствомъ О. Норденшельда.

Англійская экспедиція вышла 6 августа 1901 г. изъ Coves и, сдѣлавъ остановку въ Капштадтѣ, направилась въ Новую Зеландію. Во время перехода изъ Капштадта въ Новую Зеландію до 62°50′ ю. ш. и 139°40′ в. д. было сдѣлано нѣсколько промѣровъ, показавшихъ глубины 4300—3200 м. (2380 и 1750 саж.), подтверждающія промѣры на „Challenger" и „Valdivia". На островѣ „Macquarie", гдѣ была сдѣлана остановка на нѣсколько часовъ, собраны естественноисторическія коллекціи. Переходъ экспедиціи изъ Капштадта въ Новую Зеландію, хотя и былъ бурный и не разъ грозилъ опасностью, такъ какъ судно дало сильную течь, но окончился вполнѣ благополучно. Въ Литтлетовѣ судно ввели въ докъ, гдѣ оно подверглось тщательному осмотру и починкѣ. Течь, однако, не вполнѣ уничтожили, но настолько уменьшили, что дальнѣйшее плаваніе можетъ считаться вполнѣ безопаснымъ. Между тѣмъ, Лондонское географическое общество снарядило на

---

*) Перепечатано изъ „Метеор. Вѣстника".

южное лѣто 1902—1903 г. второе судно „Morning", чтобъ доставить свѣжіе запасы провизіи, уголь и людей на будущую станцію на землѣ Викторіи. Причиной посылки такой вспомогательной экспедиціи является опасеніе за участь „Discovery". Экспедиція на суднѣ „Morning" вышла изъ Лондона 9 іюля н. ст.

Германская экспедиція на суднѣ „Gauss" вышла изъ Киля 11 августа 1901 г. По пути къ Капштадту она имѣла остановку на островѣ С. Винцентѣ (острова Зеленаго мыса), гдѣ произведены были весьма цѣнныя наблюденія надъ силою тяжести, магнитныя и естественноисторическія на прибрежьи и внутри острова, доставившія новыя данныя для физической географіи острова. Уйдя изъ С. Винцента, „Gauss" пересѣкъ экваторъ приблизительно въ долготѣ 18° зап. и занялся океанографическими изслѣдованіями въ южномъ Атлантическомъ океанѣ. Этими изслѣдованіями установлено существованіе глубокой впадины, отъ 7200 до 7400 м., почти подъ экваторомъ, на меридіанѣ около 18° зап. долготы. Эта впадина была открыта уже въ 1887 г. экспедиціею „Romanche", но такъ какъ она приходится рядомъ съ серединною подводною возвышенностью Атлантическаго океана, глубина на которой, какъ извѣстно, не превышаетъ 3500 м., то существованіе ея казалось одно время какъ бы сомнительнымъ. Переходъ отъ серединной возвышенности океана къ впадинѣ „Romanche" необыкновенно крутой, представляя какъ бы обрывъ. По изслѣдованію экспедиціи „Gauss", грунтъ дна во впадинѣ ясно обнаруживаетъ слѣдующее наслоеніе: сверху — глубоководная красная глина съ довольно крупными вулканическими продуктами, затѣмъ идутъ слои буревато-сѣраго и почти сѣрокоричневаго ила и, наконецъ, темносѣрый, подстилаемый тонкимъ слоемъ свѣтлосѣраго ила, содержащаго отчасти известь, тогда какъ всѣ верхніе слои лишены известковыхъ частей. Средніе слои ила похожи на прибрежныя отложенія, особенно, на голубой илъ западно-африканскихъ тропическихъ прибрежій. Подобный составъ грунта дна приводитъ д-ра Филиппи, участника экспедиціи „Gauss", къ заключенію, что вышеупомянутая область, находясь еще въ новѣйшее время подъ вліяніемъ вулканическихъ изверженій, подверглась опусканію, которому должно было предшествовать поднятіе дна.

По сообщенію самого Дрыгальскаго, германская экспедиція покинула Капштадтъ 7 декабря. 25 декабря была сдѣлана остановка на островѣ Поссессіонъ, самомъ большомъ изъ острововъ Крозетъ, гдѣ удалось собрать обширныя коллекціи. 31 декабря экспедиція достигла сѣвернаго берега Кергэленскихъ острововъ, а 2 января залива „Обсерваторіи". Весь мѣсяцъ прошелъ въ нагрузкѣ угля и провизіи, такъ что двинулись далѣе къ югу только 31-го января. Слѣдующую остановку предполагаютъ сдѣлать на островѣ Termination, лежащемъ подъ 64° южной широты и открытомъ Уильксомъ въ 1840 г.

Шведская экспедиція вышла 10 октября 1901 г. изъ Готе-

бурга, 20-го декабря покинула Буэносъ-Айресъ и, пройдя мимо Фалкландскихъ острововъ, направилась къ землѣ Грагама. По телеграммѣ изъ Монтевидео видно, что Норденшельду удалось не только прослѣдить берегъ Грагамовой земли, но и воспроизвести его на картѣ, а также дополнить таковую, сдѣланную еще въ 1893 г. капитаномъ Ларсеномъ, нынѣ командиромъ судна „Antarctic“, командовавшимъ тогда судномъ „Jason“, изслѣдовавшимъ восточный берегъ земли Грагама. Затѣмъ экспедиція вернулась на землю Людовика-Филиппа, гдѣ и предполагаетъ провести зиму, между тѣмъ какъ „Antarctic“ отправленъ къ берегамъ Патагоніи, чтобъ зимнее время употребить на зоологическія и гидрографическія работы. Норденшельдъ, слѣдуя къ югу вдоль западнаго берега земли Людовика-Филиппа, достигъ Бельгійскаго зунда, открытаго на западномъ берегу земли Грагама лейтенантомъ Герлахомъ, и такимъ путемъ удалось сдѣлать важное открытіе, что земля Людовика-Филиппа и земля Грагама составляютъ одинъ материкъ. Чтобы достигнуть восточнаго берега, Норденшельдъ долженъ былъ объѣхать землю Людовика-Филиппа, но положеніе льдинъ было такъ неблагопріятно, что онъ принужденъ былъ повернуть, не дойдя 2° до самой южной точки, достигнутой Ларсеномъ въ 1893 году.

По сообщенію геолога Андерсона изъ порта Стэнлей, „Antarctic“ вышелъ 11-го апрѣля изъ Фалкландскихъ острововъ и 22-го апрѣля бросилъ якорь въ заливъ Кумберландъ на островѣ Южной Георгіи. На переходѣ изъ Фалкландскихъ острововъ къ Кумберланду производились океанографическія изслѣдованія. Въ этой части моря между Фалкландскими островами и Буве почти не имѣется промѣровъ, и по г. Рейтеру предполагается существованіе подводной возвышенности между Фалкландскими о-вами и островомъ Южной Георгіи. Промѣръ „Antarctic“ показалъ, что о такой возвышенности не можетъ быть и рѣчи; глубина въ этой мѣстности увеличивается до 3630 м. (2000 с.). 27—30 апрѣля экспедиція осмотрѣла зданія Нѣмецкой бывшей метеорологической станціи 1882—1883 гг.; бывшая обсерваторія приходитъ въ разрушеніе, также оказался сломаннымъ и минимальный термометръ, оставленный здѣсь на ближайшей горѣ экспедиціею 1882—1883 г. Ледникъ Росса, который по измѣреніямъ 1882—1883 г. находился въ періодѣ отступанія, въ настоящее время оказался подвинувшимся къ морю. Вторая половина мая (начало зимы) отличалась прекрасною погодою, благопріятствовавшей съемкамъ и другимъ научнымъ работамъ. Въ заливѣ произведенъ промѣръ, показавшій глубины 250—310 м., а въ устьѣ банку въ 177—179 м. глубины. Особенно интересны ледниковыя явленія въ заливѣ; найдены слѣды двухъ оледенѣній, изъ которыхъ первое раннее, вѣроятно, распространялось на весь заливъ, а новѣйшее имѣло болѣе ограниченные размѣры.

15-го іюня „Antarctic“ вышелъ изъ Южной Георгіи и, поднявшись къ сѣверу до 48°27′ ю. ш., прибылъ въ портъ Стэнлей

4-го іюля. На этомъ пути сдѣланъ промѣръ, доставившій первыя данныя о рельефѣ дна въ этой мѣстности. Глубина оказалась до 5977 м. (около 3300 саж.) въ шир. 48°27′ юж. и долг. 42°36′ з., довольно близкая, впрочемъ, къ предположенной здѣсь по картѣ Мёррея.

Съ глубины 2000—2700 м. добыты вертикальными сѣтками богатыя коллекціи рыбъ, великолѣпныхъ медузъ, ракообразныхъ и проч.

Въ заключеніе о южно-полярныхъ изслѣдованіяхъ укажемъ о проектахъ еще новыхъ экспедицій. Такъ, уже снаряжена Шотландская антарктическая экспедиція подъ руководскомъ W. J. Bruce на суднѣ „Hecla". Это судно передѣлано изъ китоловнаго и командовать имъ приглашенъ капитанъ Робертсонъ, извѣстный китоловъ, принимавшій участіе въ 1892—1893 гг. въ предпріятіи Шотландскихъ китоловъ въ антарктическихъ водахъ. Экспедиція предполагаетъ выйти въ сентябрѣ с. г. и цѣлью ея послужитъ изслѣдованіе моря Ведделя, около Сандвичевыхъ острововъ, и котловины Росса подъ 68° ю. ш., для опредѣленія глубины послѣдней. Извѣстно, что Россъ во время своей антарктической экспедиціи 1839—1842 гг. не могъ достать дна въ упомянутой котловинѣ на 4000 саж., но такъ какъ способы измѣренія глубинъ въ то время были несовершенны, то этотъ промѣръ Росса и подлежитъ сомнѣнію.

Норвежецъ Борхгревингъ, два раза уже посѣщавшій землю Викторіи и первый перезимовавшій на Антарктидѣ, надѣется снарядить еще экспедицію на средства американцевъ, а Бельгійскій капитанъ Герлахъ проектируетъ антарктическую экспедицію на средства одного французскаго капиталиста.

І. Ш.

Замѣтка по поводу рѣшенія трехчленныхъ уравненій.

Такъ какъ рѣшеніе трехчленныхъ уравненій входитъ въ курсъ элементарной алгебры, то, можетъ быть, стоитъ извлечь изъ него *попутно* одно довольно интересное слѣдствіе. Пусть дано уравненіе:

$$x^6+px^3+q^3=0.$$

Рѣшенія его извѣстны и выражаются формулами:

$$x_1=\alpha\sqrt[3]{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^3}}$$

$$x_2=\alpha^2\sqrt[3]{-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^3}}$$

$$x_3=\alpha^2\sqrt[3]{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^3}}$$

$$x_4=\alpha\sqrt[3]{-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^3}}$$

$$x_5=\sqrt[3]{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^3}}$$

$$x_6=\sqrt[3]{-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^3}},$$

гдѣ α и α^2 суть мнимые кубическіе корни изъ единицы.

Легко видѣть (непосредственно и изъ разныхъ соображеній), что

$$x_1x_2=q$$

$$x_3x_4=q$$

$$x_5x_6=q.$$

Замѣтивъ это, преобразуемъ данное уравненіе въ нѣкоторое другое — кубическое. Такъ какъ данное уравненіе мы рѣшать умѣемъ, то сумѣемъ рѣшать и кубическое. Съ цѣлью преобразованія, раздѣлимъ обѣ части даннаго уравненія на x^3:

$$x^3+p+\left(\frac{q}{x}\right)^3=0$$

и положимъ: $$x+\frac{q}{x}=y.$$

Такъ какъ:

$$x^3+\left(\frac{q}{x}\right)^3+3x\cdot\frac{q}{x}\left(x+\frac{q}{x}\right)=y^3,$$

то данное уравненіе преобразуется въ слѣдующее кубическое:

$$y^3-3qy+p=0,$$

и корнями его будутъ:

$$y_1=x_1+\frac{q}{x_1}=x_1+x_2$$

$$y_2=x_3+\frac{q}{x_3}=x_3+x_4$$

$$y_3=x_5+\frac{q}{x_5}=x_5+x_6.$$

Слѣдовательно, вообще (подразумѣвая α и α^2):

$$y=\sqrt[3]{-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^3}}+\sqrt[3]{-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q^3}},—$$

это и есть формула *Кардана*, примѣненная къ уравненію:

$$y^3-3qy+p=0.$$

Замѣтимъ, что трехчленными уравненіями занимались *Моавръ*, *Эйлеръ* и др. *A. Serret.* Cours l'algèbre superieure. *Marie.* Histoire des sciences mathématiques, статьи *Realis* и др. въ Nouvelles annales.

М. Попруженко.

Кіевъ.

НАУЧНАЯ ХРОНИКА.

Научный дневникъ Гаусса. Еще въ концѣ 1901 г. проф. F. Klein выпустилъ небольшую брошюру въ 44 стр. подъ заглавіемъ „Gauss'wissenschaftliches Tagebuch, 1796—1814". („Научный дневникъ Гаусса").

Будучи еще юношей, не достигшимъ 19-ти-лѣтняго возраста, Гауссъ сталъ заносить въ особую тетрадку замѣтки, къ сожалѣнію, обыкновенно чрезвычайно краткія, относительно сдѣланныхъ имъ математическихъ открытій. Записи въ этомъ научномъ дневникѣ сдѣланы по латыни (Гауссъ называетъ его Catalogus). Первая запись относится къ 30 марта 1796 года и содержитъ сообщеніе, что Гауссъ нашелъ построеніе правильнаго семнадцатиугольника. Вслѣдъ за этой замѣткой записи быстро слѣдуютъ одна за другой, такъ что въ теченіе слѣдующихъ 4 — 1/4 лѣтъ ихъ оказывается 112. Позже онѣ, повидимому, заносятся уже не столь правильно, и за слѣдующіе 14 лѣтъ ихъ оказывается только 34.

Нечего и говорить о томъ, какой значительный интересъ представляетъ такой дневникъ, иллюстрирующій, при всѣхъ своихъ пробѣлахъ и неясностяхъ, порядокъ, въ которомъ математическія идеи развивались въ этой могучей головѣ. Идеи нерѣдко самой первостепенной важности еще въ самой ранней юности возникали въ этомъ умѣ въ такомъ количествѣ, что, по собственному его заявленію, онъ подчасъ не былъ въ состояніи съ ними совладать; многія изъ этихъ идей, въ особенности тѣ, которыя относятся къ теоріи эллиптическихъ функцій, такъ и не были больше воспроизведены въ его мемуарахъ.

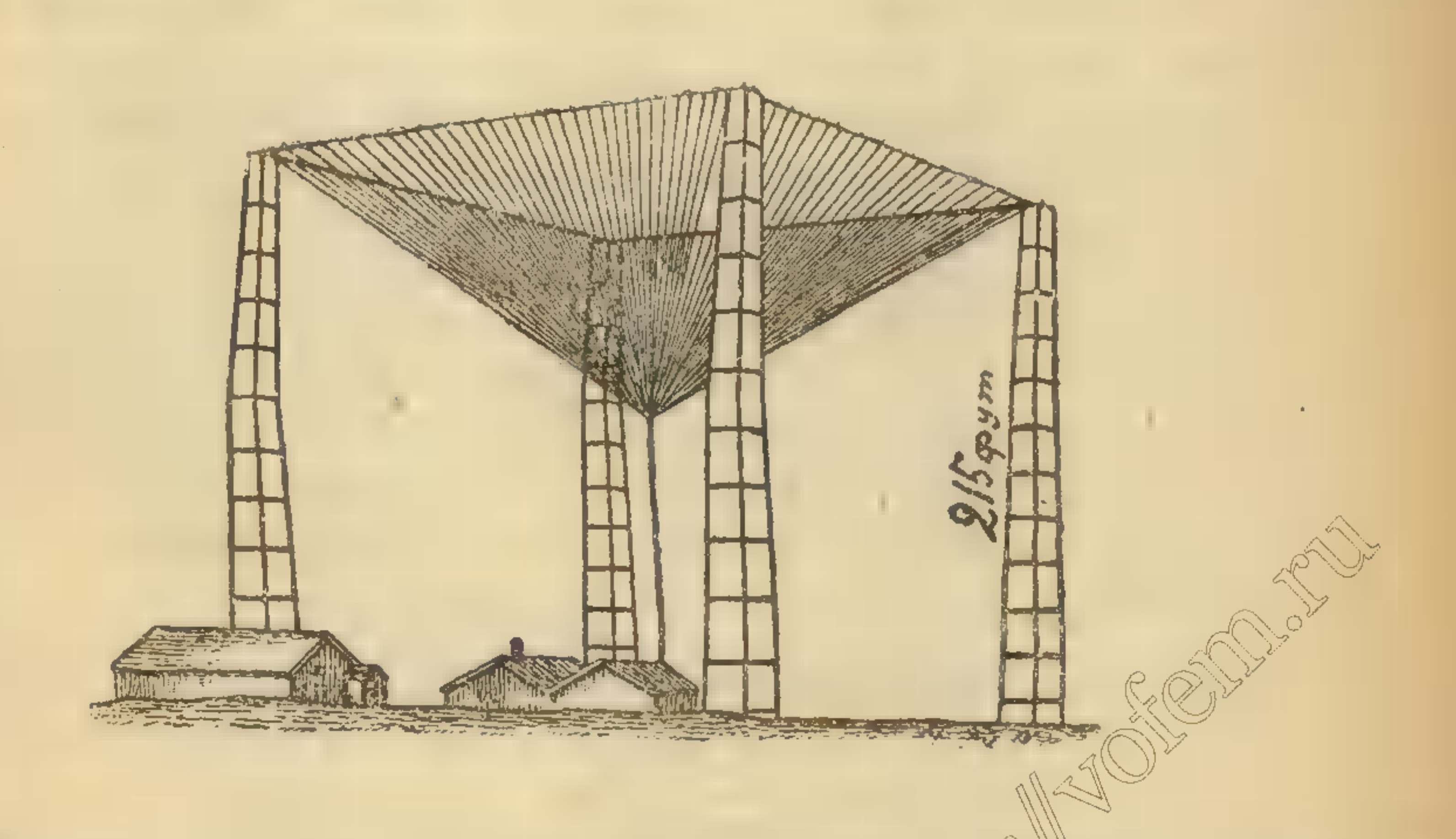
Значеніе книжки еще возрастаетъ благодаря тому, что проф. Klein снабдилъ ее многочисленными примѣчаніями, указывающими относительно каждаго вопроса, былъ-ли онъ развитъ въ позднѣйшихъ произведеніяхъ Гаусса или нѣтъ. Klein прибавляетъ,

впрочемъ, что этотъ дневникъ будетъ опубликованъ въ X томѣ собранія сочиненій Гаусса и тамъ его примѣчанія будутъ значительно дополнены.

Къ книжкѣ приложенъ не опубликованный раньше портретъ Гаусса, когда ему было 26 лѣтъ; одна изъ страницъ дневника воспроизведена въ видѣ факсимилэ.

Американская станція Маркони для телеграфированія безъ проводовъ черезъ океанъ. Въ „Scientific American" помѣщено описаніе почти готовой уже станціи Маркони для телеграфированія черезъ Атлантическій океанъ. Эта станція, первая изъ двухъ, устраиваемыхъ Маркони на американскомъ берегу, расположена на мысѣ Бретонъ въ Новой Шотландіи, въ пунктѣ, находящемся на высотѣ 70 футовъ надъ уровнемъ моря; вторая будетъ находиться на мысѣ Кодъ въ Массачузетсѣ. Европейская станція расположена въ Польдгю (Poldhu) въ Корнваллисѣ.

Станція въ Капъ-Бретонъ (см. рис.) состоитъ изъ четырехъ огромныхъ башенъ, вышиною въ 215 футовъ, и группы низкихъ строеній, расположенныхъ у подножія башенъ и заключающихъ въ себѣ мощную электрическую установку, построенную спеціально для станціи. Четыре деревянныхъ башни, показанныхъ на прилагаемомъ рисункѣ, замѣняютъ въ данномъ случаѣ обыкновенную одиночную мачту съ воздушными проводами, употребляемую при передачѣ сигналовъ на небольшія разстоянія. Эти



башни расположены въ вершинахъ квадрата, сторона котораго равна около 60 футовъ. Каждая башня, имѣющая форму обелиска, состоитъ изъ четырехъ толстыхъ стоекъ, составленныхъ изъ брусьевъ сѣченіемъ 3×12 дюймовъ, скрѣпленныхъ съ каждой стороны башни связями сѣченіемъ 3×9 дюймовъ. Брусья стоекъ скрѣплены такимъ образомъ, чтобы по возможности образовалось солидное, крѣпкое цѣлое, по прочности одинаковое съ цѣльнымъ

стержнемъ сѣченіемъ 12×12 дюймовъ. Разстояніе между центрами стоекъ у основанія равно 30 футамъ, а у вершины 9 футамъ. Фундаментъ каждой башни состоитъ изъ бетонной массы, заполняющей выемку въ видѣ четырехугольнаго канала; въ этой массѣ углублены какъ четыре стойки, общимъ сѣченіемъ въ 12×12 дюймовъ, такъ и первыя балки боковаго скрѣпленія. Въ вертикальномъ сѣченіи масса бетона имѣетъ размѣры 6 футовъ шириною и 8 футовъ глубиною.

Произведенные еще ранѣе опыты относительно наилучшаго способа подвѣски воздушныхъ проводовъ, а въ особенности, первоначальная установка въ Капъ-Кодѣ, которая была разрушена сильною бурею, показали, что наиболѣе слабая сторона въ примѣнявшихся конструкціяхъ заключается въ системѣ оттяжекъ, удерживающихъ сооруженіе въ вертикальномъ положеніи. Разрушеніе установки въ Капъ-Кодѣ произошло вслѣдствіе разрыва оттяжки, расположенной съ навѣтреной стороны, разрывъ же этотъ явился слѣдствіемъ того, что, благодаря неудачной системѣ прикрѣпленія оттяжки къ сооруженію, все усиліе, испытываемое оттяжкою, благодаря напору вѣтра, сосредоточивалось въ немногихъ точкахъ. Въ настоящее время башни конструированы такимъ образомъ, что всякое давленіе, испытываемое башнею, передается непосредственно системѣ ея собственныхъ канатовъ, изъ которыхъ каждый совершаетъ при этомъ полезную работу сопротивленія. Канаты прикрѣплены къ башнямъ въ трехъ точкахъ, въ нижней и верхней трети и въ вершинѣ, и всѣ наклонены подъ угломъ въ 45^0. Они сдѣланы изъ наилучшей стали и имѣютъ діаметръ въ $2^1/_2$, а нѣкоторые въ 3 дюйма. Способъ подвѣски воздушныхъ проводовъ показанъ на прилагаемомъ рисункѣ. Между платформами всѣхъ башенъ, находящимися на ихъ вершинахъ, натянуты четыре трехдюймовыхъ кабеля, и къ этимъ послѣднимъ прикрѣплены 150 воздушныхъ проволокъ, идущихъ внизъ и соединяющихся въ центрѣ квадрата, образуемаго башнями, въ одинъ кабель, спускающійся вертикально внизъ и оканчивающійся какъ разъ у входа въ зданіе, гдѣ находятся пріемный и передающіе аппараты. Средняя длина воздушныхъ проволокъ отъ ихъ начала до общаго центральнаго кабеля равняется приблизительно 140 футамъ.

Такая мощная конструкція станціи Маркони, а также примѣненіе особенно чувствительнаго магнитнаго пріемника, обезпечивающаго возможность быстраго телеграфированія, позволяютъ Маркони надѣяться на полный успѣхъ его предпріятія, которое въ непродолжительномъ времени откроетъ дѣйствія. Маркони надѣется также, что къ концу года ему окажется возможнымъ установить телеграфныя сношенія между его американскими станціями и южной Африкой.

„Электротех. Вѣстникъ“.

Непосредственное утилизированіе солнечной теплоты для полученія электрической энергіи. Мысль о примѣненіи солнечной теплоты, являющейся, какъ извѣстно, единственнымъ источникомъ всей энергіи, какъ потенціальной (каменный уголь и всякое другое топливо), такъ и кинетической (водные потоки, воздушныя теченія и пр.) на земномъ шарѣ, непосредственно для нагрѣванія парового котла и совершенія механической работы—уже давно занимала вниманіе изобрѣтателей; но до послѣдняго времени опыты производились лишь въ малыхъ размѣрахъ и соотвѣтствующіе приборы являлись скорѣе — хотя бы и весьма интересными и остроумными—но все-же не болѣе, какъ научными игрушками. Представитъ поэтому интересъ сообщить нашимъ читателямъ о функціонирующей въ Калифорніи практической электрической установкѣ, движущую силу для которой доставляетъ солнечная теплота. Описаніе этой установки помѣщено *В. Бланкомъ* въ „Elektrotechnische Zeitschrift“.

Установка эта устроена на одной страусовой фермѣ въ мѣстечкѣ Южная Пасадена близъ Лосъ-Ангелесъ въ Калифорніи. Существенною ея частью является большое параболическое зеркало въ 10 *m.* діаметромъ у внѣшняго края и 5 *m.* у внутренняго, состоящее изъ 1788 маленькихъ зеркальныхъ пластинокъ и отражающее солнечные лучи на находящійся въ фокусѣ параболоида паровой котелъ, который производитъ рабочее давленіе въ 12 атмосферъ и служитъ для приведенія въ дѣйствіе 15-ти-сильной паровой машины-компаундъ съ поверхностной конденсаціей. Паровой котелъ вмѣщаетъ 670 фунт. воды и требуетъ часа времени, чтобы получилось указанное давленіе.

Въ настоящее время паровая машина вращаетъ центробѣжный насосъ, служащій для орошенія фермы, и динамо для заряженія батареи аккумуляторовъ, предназначенныхъ для освѣщенія и для приведенія въ дѣйствіе небольшихъ вентиляторовъ въ торговыхъ складахъ, гдѣ находятся страусовыя перья.

Послѣ того какъ зеркало установлено при восходѣ солнца надлежащимъ образомъ, что̀ можетъ быть сдѣлано однимъ рабочимъ, зеркало не требуетъ дальнѣйшаго надзора. Измѣненіе же его положенія, соотвѣтственно перемѣщенію солнца, производится автоматически дѣйствіемъ особаго часового механизма, который каждыя 60 секундъ вращаетъ зеркало на опредѣленный уголъ, подобно тому какъ это совершается въ астрономическихъ телескопахъ на большихъ обсерваторіяхъ. Благодаря такому приспособленію, при примѣненіи автоматическаго питанія котла достигается довольно равномѣрное образованіе пара, такъ что результаты дѣйствія установки, при существующемъ въ этой мѣстности обиліи и силѣ солнечнаго свѣта, являются вполнѣ удовлетворительными.

(„Электротех. Вѣстникъ“).

Изслѣдованіе синевы неба. Въ № 20 1902 года Philosophical Magazine мы находимъ экстрактъ весьма интересной работы Цеттвича по изслѣдованію синевы неба. Цеттвичъ провѣрялъ, главнымъ образомъ, теорію Лорда Релея, согласно которой синева неба обусловливается отраженіемъ свѣта отъ частицъ воздуха, меньшихъ длины волны свѣта; при этомъ интенсивность радіаціи обратно пропорціональна 4-й степени длины волны свѣта (теорія мутной среды).

По изслѣдованію Цеттвича оказалось, что свѣтъ, отраженный небомъ, является весьма измѣнчивымъ феноменомъ въ одной и той же точкѣ. При этомъ интенсивность радіаціи измѣняется, и степень длины волны свѣта, которой обратно пропорціональна радіація, не остается постоянной, но зависитъ отъ зенитнаго разстоянія солнца, облачности, относительной влажности и другихъ случайныхъ причинъ.

Однако, все же эта степень колеблется близко около 4-хъ и, слѣдовательно, теорія Релея удовлетворительно объясняетъ явленіе. Въ заключеніи авторъ вполнѣ соглашается съ мнѣніемъ Перштера, что „мутная среда, называемая воздухомъ, и есть то, что обусловливаетъ синеву неба; слабый собственный цвѣтъ воздуха, если онъ есть, является ничтожнымъ по сравненію съ этой причиной“.

(„Метеор. Вѣстникъ“).

Анестезированіе токами большой частоты. Недавно доктору Биллинкину въ Эпернеѣ удалось совершить весьма трудную хирургическую операцію послѣ анестезированія больного при помощи токовъ большой частоты. До сего времени анестезированіе электрическимъ путемъ примѣнялось лишь въ рѣдкихъ случаяхъ при незначительныхъ операціяхъ, каковы, напр., удаленіе зубовъ и проч. Доктору Биллинкину удалось вызвать полную и весьма продолжительную анестезію, подвергая больного дѣйствію токовъ большой частоты въ теченіе всей операціи. Успѣшный опытъ этотъ позволяетъ надѣяться на то, что означенные токи съ пользой смогутъ быть примѣнены при болѣе важныхъ хирургическихъ операціяхъ, такъ какъ анестезированіе паціента оказывается полнымъ.

(„Электротехникъ“).

ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

Рѣшенія всѣхъ задачъ, предложенныхъ въ текущемъ семестрѣ, будутъ помѣщены въ слѣдующемъ семестрѣ.

№ 262 (4 сер.). Даны уголъ *BAC* и точка *D*. На еторонахъ угла найти точки *X* и *У* такъ, чтобы прямая *XУ* была перпендикулярна къ *AD* и разность угловъ *ADX* и *ADУ* была данной величины.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 263 (4 сер.). Даны уголъ *B* и точка *A*. Вписать въ этотъ уголъ треугольникъ *XAУ* такъ, чтобы основаніе *XУ* этого треугольника имѣло данное направленіе и чтобы сумма (или разность) основанія *XУ* и высоты *AZ* была данная.

И. Александровъ (Тамбовъ).

№ 264 (4 сер.). Вписать въ данный полукругъ такой прямоугольникъ, у котораго сумма діагонали и стороны, перпендикулярной къ діаметру, достигаетъ maximum'а. Опредѣлить также minimum этой суммы.

Г. Огановъ (сел. Гомадзоръ).

№ 265 (4 сер.). Рѣшить систему уравненій:

$$\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)\left(x^2-\frac{y^4}{x^2}\right)=abx^2y^2,$$

$$\frac{x}{y^2}+\frac{y}{x^2}=\frac{a+b}{2},$$

Н. Готлибъ (Митава).

№ 266 (4 сер.). Доказать, что при условіи

$$\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2<1$$

абсолютная величина одного изъ количествъ a и b больше, а другого — меньше 1.

(Заимств.).

№ 267 (4 сер.). Поршень, вѣсъ котораго обозначимъ черезъ *P*, закрываетъ вертикальный цилиндръ, наполненный воздухомъ подъ давленіемъ въ 3 атмосферы. Нижнее основаніе поршня отстоитъ на 10 сантиметровъ отъ дна цилиндра.

Опредѣлить пониженіе поршня при нагрузкѣ его въ 2P, зная, что атмосферное давленіе *H* равно 76 сант. и что плотность ртути *d* равна 13,6.

М. Гербановскій (Заимств.).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 162 (4 сер.). *На данной гипотенузѣ построить такой прямоугольный треугольникъ, въ которомъ сумма высоты и катета наибольшая.*

Пусть A—вершина прямого угла, $BC=a$—данная гипотенуза, AD—высота прямоугольнаго треугольника. Обозначимъ острый уголъ ACB черезъ α. Тогда

$$AB=a\sin\alpha,\quad AD=AB\cos\alpha=a\sin\alpha\cos\alpha.$$

Слѣдовательно, сумма s катета AB и и высоты AD равна

$$s=a\sin\alpha(1+\cos\alpha)\qquad(1).$$

Возвысивъ обѣ части равенства (1) въ квадратъ, находимъ:

$$s^2=a^2\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)^2=a^2(1-\cos^2\alpha)(1+\cos\alpha)^2=$$

$$=a^2(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)^3\qquad(2).$$

Такъ какъ a, по условію, величина постоянная, а сумма *положительныхъ* перемѣнныхъ величинъ $1-\cos\alpha$ и $1+\cos\alpha$ равна постоянной величинѣ 2, то *maximum* выраженія (2) наступаетъ, какъ извѣстно, при условіи:

$$\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{3}{1},$$

откуда $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=60^0$ (такъ какъ $0<\alpha<90^0$).

Такъ какъ maximum s наступаетъ одновременно съ maximum'омъ s^2, то искомый треугольникъ есть тотъ, въ которомъ $\angle\alpha$ равенъ 60^0. Для построенія искомаго треугольника достаточно на данной гипотенузѣ BC описать полуокружность, какъ на діаметрѣ, и изъ точки C радіусомъ $\frac{BC}{2}$ сдѣлать засѣчку A на полуокружности. Тогда треугольникъ ABC есть искомый.

Г. Огановъ (сел. Гомадзоръ); *Н. С.* (Одесса).

№ 164 (4 сер.). *Рѣшить систему уравненій:*

$$x^3+y^3+3(x+y)(x-b)(y-b)=a^3+b^3,$$

$$x^3-y^3+3(x-y)(a-x)(a+y)=a^3-b^3.$$

Изъ перваго уравненія выводимъ послѣдовательно равенства:

$$x^3+y^3+3(x+y)[xy-b(x+y)+b^2]-b^3=a^3,$$

$$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2-3b(x+y)^2+3b^2(x+y)-b^3=a^3,$$

$$(x+y-b)^3=a^3$$

$$x+y-b=a\alpha;\quad x+y=b+a\alpha\qquad(1),$$

гдѣ α—одно изъ трехъ значеній корня кубичнаго изъ 1.

Точно также второе уравненіе даетъ:

$$x^3-y^3+3xy[-xy-a(x-y)+a^2]-a^3=b^3,$$

$$(x-y)^3-3(x-y)^2a+3(x-y)a^2=b^3,$$

$$(x-y-a)^3=-b^3,$$

$$x+y-a=-b\beta;\quad x-y=a-b\beta\qquad(2),$$

гдѣ β—одно изъ трехъ значеній корня кубичнаго изъ 1.

Уравненія (1) и (2) даютъ:

$$x=\frac{a(\alpha+1)+b(1-\beta)}{2},\quad y=\frac{a(\alpha-1)+b(1+\beta)}{2}\qquad(3),$$

гдѣ α и β независимо другъ отъ друга могутъ принимать одно изъ трехъ значеній корня кубичнаго изъ 1, такъ что формулы (3) даютъ вообще девять различныхъ рѣшеній. Полагая $\alpha=\beta=1$, находимъ: $x=a$, $y=b$.

Г. Огановъ (Эривань); *Д. Коварскій* (Двинскъ); *Н. Готлибъ* (Митава); *М. Поповъ* (Асхабадъ); *И. Плотникъ* (Одесса); *С. Кудинъ* (Москва); *Я. С.* (Орелъ).

№ 206 (4 сер.). ***Рѣшить систему уравненій:***

$$a+x-y+z=b+y-z-x=c+z-x-y=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Изъ уравненій

$$a+x-y-z=c+z-x-y;\quad b+y-z-x=c+z-x+y$$

находимъ:

$$2x-2z=c-a,\quad 2y-2z=c-b,$$

откуда

$$x=z+\frac{c-a}{2},\quad y=z+\frac{c-b}{2},$$

или

$$x=z+\alpha,\quad y=z+\beta\qquad(1),$$

гдѣ

$$\alpha=\frac{c-a}{2},\quad \beta=\frac{c-b}{2}\qquad(2).$$

Подставляя найденныя (см. (1)) значенія x и y въ уравненіе

$$c+z-x-y=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

находимъ:

$$\frac{a+b}{2}-z=\sqrt{3z^2+2(\alpha+\beta)z+\alpha^2+\beta^2}\qquad(3),$$

$$\left(\frac{a+b}{2}-z\right)^2=3z^2+2(\alpha+\beta)z+\alpha^2+\beta^2,$$

или (см. (2))

$$z^2+cz+\frac{c^2-(ab+bc+ac)}{4}=0,$$

откуда

$$z=\frac{-c\pm\sqrt{ab+bc+ac}}{2}.$$

Подставляя это значеніе z въ равенство (1), находимъ:

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{ab+bc+ac}}{2},\quad y=\frac{-b\pm\sqrt{ab+bc+ac}}{2}.$$

Въ найденныхъ трехъ формулахъ для x, y и z надо брать одновременно вездѣ или верхніе, или нижніе знаки передъ радикаломъ, при чемъ число годныхъ рѣшеній провѣряется подстановкой найденнаго значенія z въ уравненіе (3).

Г. Огановъ (село Гомадзоръ); *Н. Готлибъ* (Митава); *Л. Гальперинъ* (Бердичевъ).

№ 212 (4 сер.). ***Пусть***

$$b = \prod_{k=1}^{n} b_k,$$

гдѣ сомножители $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *суть положительныя числа. Пусть* a*—нѣкоторое положительное число.*

Доказать, что

$$\frac{1}{\lg_b a} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\lg_{b_k} a}.$$

Введемъ обозначенія: $\lg_b a = x$; $\lg_{b_k} a = x_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ (1), откуда

$$a = b^x, \quad a = b_k^{x_k}; \quad b = a^{\frac{1}{x}}, \quad b_k = a^{\frac{1}{x_k}} \qquad (2).$$

Перемноживъ почленно равенства

$$b_1 = a^{\frac{1}{x_1}}, \quad b_2 = a^{\frac{1}{x_2}}, \ldots, b_n = a^{\frac{1}{x_n}}$$

и принявъ во вниманіе, что, по условію, $b_1 \,.\, b_2 \ldots\ldots b_n = b = a^{\frac{1}{x}}$ (см. 2), находимъ:

$$a^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$

откуда

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n},$$

или (см. (1)):

$$\frac{1}{\lg_b a} = \frac{1}{\lg_{b_1} a} + \frac{1}{\lg_{b_2} a} + \ldots + \frac{1}{\lg_{b_n} a}.$$

Формула эта теряетъ смыслъ, при указанныхъ выше ограниченіяхъ, лишь при $a = 1$.

Н. Готлибъ (Митава); *Д. Правдинъ* (Петрозаводскъ).

ПОПРАВКИ.

Въ задачѣ № 244 (Вѣстникъ № 230) вмѣсто

$$4\lg_{\operatorname{ctg}x\cos x} \sin x$$

должно быть:

$$\lg_{\operatorname{ctg}x\cos x} \sin x.$$

На стр. 127, 14 стр. сн.

Напечатано: „Хотя формула"; должно быть: „Формула".

Стр. 138, 4 строка сверху.

Напечатано: „по орбитѣ", должно быть: „его орбиты".

На стр. 138, 13 стр. св.

Напечатано: „Мимоса, Экцелода"; должно быть: „Мимаса, Энцелада".

Редакторы: **В. А. Циммерманъ** и **В. Ф. Каганъ**. Издатель **В. А. Гернетъ**.

Дозволено цензурою, Одесса 15-го Ноября 1902 г.

Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская, д. № 64.